TẠP CHÍ KHOA HỌC & CÔNG NGHỆ ĐẠI HỌC DUY TÂN
DTU Journal of Science and Technology 5(48) (2021) 43-51

TRƯỜNG ĐẠI HỌC DUY TÂN
DUYTAN UNIVERSITY

Sử dụng phương pháp Markov Chain Monte Carlo ước lượng hàm mũ ma trận

Using Markov chain Monte Carlo to estimate matrix- exponential distribution

Lê Văn Dũng[a], Trần Đông Xuân[b,c*]
Le Van Dung[a], Tran Dong Xuan[b,c*]

[a]*Faculty of Mathematics, the University of Da Nang - Da Nang University of Education and Science*
[b]*Viện Nghiên cứu Khoa học Cơ bản và Ứng dụng, Trường Đại học Duy Tân, TP. HCM, Việt Nam*
[b]*Institute of Fundamental and Applied Sciences, Duy Tan University, Ho Chi Minh City 700000, Vietnam*
[c] *Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, Việt Nam*
[c]*Faculty of Natural Sciences, Duy Tan University, Da Nang, 550000, Vietnam*

(Ngày nhận bài: 12/5/2021, ngày phản biện xong: 17/5/2021, ngày chấp nhận đăng: 21/9/2021)

Tóm tắt

Bài viết này trình bày về phương pháp ước lượng hàm phụ thuộc vào một hoặc nhiều phân phối mũ ma trận. Phương pháp được chúng tôi đề nghị sử dụng là Markov chain Monte Carlo nhằm xây dựng quá trình Markov dưới biến mũ ma trận kết hợp với mẫu Gibbs để thu được một dãy độ đo xác suất mũ ma trận dừng từ phân phối hậu nghiệm của quan trắc đã cho. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng dựa vào biến đổi Laplace-Stieltjes và biến đổi Laplace-Stieltjes ngược của phân phối mũ ma trận để đề ra công thức tính xác suất phá sản của công ty bảo hiểm trong mô hình rủi ro hai chiều.

Từ khóa: Markov chain Monte Carlo; phân phối mũ ma trận; xác suất phá sản.

Abstract

In the article, we present a method of functional estimation to depend on one or a lot of matrix exponential distribution. The Markov chain Monte Carlo is used to create Markov process with variable of matrix exponential distribution to combine with Gibbs sampling to obtain a series of the matrix exponential ergodic for probability measure from posterior distribution of given observational data. Besides, the Laplace-Stieltjes and inverse Laplace-Stieltjes transform of the matrix exponential distribution are used to obtain a formula to calculate ruin probabilities based on two dimensional ruin model of insurance company.

Keywords: Markov chain Monte Carlo; matrix exponential distribution; ruin probabilities.

1. Mở đầu

Trong bài báo này, chúng tôi phát triển phương pháp ước lượng hàm của phân phối mũ ma trận từ phân phối bồi thường bảo hiểm chưa biết. Phân phối này được áp dụng để tính xác suất phá sản của công ty bảo hiểm với số khách hàng yêu cầu bồi thường tương ứng với quá trình Poison.

Ý tưởng chính là tạo ra một dãy độ đo mũ ma trận ngẫu nhiên dừng từ phân phối của thông tin quan sát và sử dụng tính dừng của dãy để ước lượng các biến bằng trung bình mô

Corresponding Author: Tran Dong Xuan, Institute of Fundamental and Applied Sciences, Duy Tan University, Ho Chi Minh City, 700000, Vietnam; Faculty of Natural Sciences, Duy Tan University, Danang City 550000, Vietnam
Email: trandongxuan@duytan.edu.vn

phỏng của hàm độ đo trong dãy. Trọng tâm của bài báo này là đề ra công thức tính xác suất phá sản của mô hình rủi ro hai chiều dựa vào công thức biến đổi Laplace-Stietjes và mô phỏng quá trình Markov theo biến mũ ma trận. Cụ thể hơn, đối với quan trắc $X = x$ từ phân phối mũ ma trận, chúng ta thiết lập một phương pháp mô phỏng từ phân phối có điều kiện theo quá trình Markov với thời gian đạt đến $X = x$ đã cho. Mô phỏng này được thực hiện như thuật toán Metropolis-Hastings (MH). Bên cạnh đó, mẫu Gibb (Gibbs sampler) được sử dụng để suy luận và trong mỗi bước lặp, chúng tôi sử dụng thuật toán MH để khôi phục lại quá trình Markov.

Bài báo được trình bày như sau: Phần 1 là phần mở đầu của bài báo; một số tính chất của phân phối mũ ma trận, phân tích Bayes và phương pháp Markov chain Monte Carlo được đưa ra trong Phần 2. Phần 3 được dành để xây dựng thuật toán và mô tả mục đích của hỗn hợp tiên nghiệm (hyper-prior) đối với trường hợp ít thông tin tiên nghiệm (prior), cải thiện hỗn hợp xích Markov của quá trình Markov. Mô hình rủi ro hai chiều và công thức tính xác suất phá sản của công ty bảo hiểm được trình bày trong Phần 4. Cuối cùng, kết luận và một vài suy nghĩ tiếp theo được thảo luận trong Phần 5.

2. Một vài kiến thức liên quan

2.1. Phân phối mũ ma trận (matrix-exponential distributions)

Trong phần này, chúng tôi giới thiệu lớp phân phối mũ ma trận (ME), đọc giả có thể tham khảo Lipsky [1, chương 3] và Asmussen [5] để thấy nhiều tính chất quan trọng của phân phối này.

Biến ngẫu nhiên Z được gọi là phân phối ME nếu hàm mật độ và hàm phân phối của nó được định nghĩa với z ≥ 0 có dạng:

$$f(z) = \boldsymbol{\alpha}\exp(\mathbf{A}z)\mathbf{a}; \qquad F(z) = \begin{cases} \alpha_0, & z = 0 \\ 1 + \boldsymbol{\alpha}\exp(\mathbf{A}z)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}, & z > 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó,

- $p \geq 1$ và $0 \leq \alpha_0 \leq 1$,
- $\boldsymbol{\alpha}$ là vector hàng 1 × p,
- **A** là ma trận p × p,
- **a** là ma trận cột p × 1.

Rõ ràng F(z) trong phương trình (2.1) là hàm phân phối với các tham số α, A và α_0 vì nó liên tục phải với z = 0. Đó là,

$$\lim_{z \to 0^+} (1 + \boldsymbol{\alpha}\exp(\mathbf{A}z)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}) = \alpha_0$$

tham số α_0 được biết như điểm mass tại 0. Chúng ta không xét trường hợp $\alpha_0 = 1$ vì khi $\alpha_0 = 1$ thì sẽ dẫn đến hàm phân phối tầm thường (trivial distribution function). Khi đó, chúng ta có thể nói phân phối ME có biểu diễn (**α**, **A**, **a**) với cấp p. Biến đổi Laplace-Stieltjes (LST) của (2.1) được cho bởi:

$$f^*(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda z} dF(z) = \boldsymbol{\alpha}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{a} + \alpha_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

sao cho $\Re(\lambda) > -\delta$ với $\delta \in \mathbb{Z}^+$. (2.2)

Đạo hàm (2.2) k lần theo λ và đặt $\lambda = 0$, moment thứ k được viết dưới dạng:

$$m_k = (-1)^{k+1} k! \boldsymbol{\alpha}\mathbf{A}^{-(k+1)}\mathbf{a}.$$

Asmussen và Bladt [1] chứng minh rằng tất cả các phân phối trong lớp phân phối ME có cùng biến đổi Laplace-Stieltjes hữu tỷ có dạng:

$$f^*(\lambda) = \frac{a_1 + a_2\lambda + \cdots + a_p\lambda^{p-1}}{b_1 + b_2\lambda + \cdots + b_p\lambda^{p-1} + \lambda^p} + \alpha_0, \qquad a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p \in \mathbb{R}.$$

Chúng ta xem $a_1 + a_2\lambda + \cdots + a_p\lambda^{p-1}$ và $b_1 + b_2\lambda + \cdots + b_p\lambda^{p-1} + \lambda^p$ lần lượt là tử số và mẫu số của LST.

Ví dụ:

a. Hàm mật độ của phân phối hyper-exponential (GH) là

$$f(z)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i e^{-\lambda_i z}\text{, với } z\ge 0,\ \ \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1 \text{ và } \lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_n>0.$$

Theo Botta, Harris và Marchal [3], phân phối GH có biểu diễn ME(α, A, a) như sau:

$$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n);\quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}-\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -\lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda_n\end{pmatrix};\quad \mathbf{a}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

b. Mỗi phân phối phase-type (PH) có biểu diễn ME(**α**, **A**, -**Ae**), trong đó **α** là vector xác suất trạng thái ban đầu và **A** là cường độ chuyển trạng thái của xích Markov thời gian liên tục với hữu hạn trạng thái.

2.2. Phân tích Bayes

Trong phần này, chúng tôi trình bày một cách ngắn gọn các khái niệm cơ bản trong ước lượng Bayes. Để hiểu chi tiết phần này, đọc giả có thể tham khảo tài liệu [4].

Chúng ta xét quan trắc $X_1=x_1, X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n$ của biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối X_i từ hàm phân phối với hàm mật độ $f(.|\theta)$, trong đó $\theta\in\Theta$ là tham số chưa biết (có thể có số chiều lớn hoặc thậm chí là vô hạn). Chúng ta đặt $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ sao cho

$$f(x|\theta)=f(x_1|\theta)f(x_2|\theta)\cdots f(x_n|\theta).$$

Trường hợp được xét trong bài báo này, θ có biểu diễn $(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{A},\mathbf{a})$ của phân phối ME.

Cụ thể, phương pháp đề ra được dùng để ước lượng tham số θ chưa biết. Trước tiên, phân tích Bayes chỉ ra một phân phối tiên nghiệm G trên không gian Θ, ý tưởng biểu diễn thông tin ban đầu (không chắc chắn) về θ. Tuy nhiên, chúng ta sẽ quay lại bài toán xác định phân phối tiên nghiệm sau. Bây giờ, mật độ $f(.|\theta)$ được hiểu như phân phối có điều kiện θ cho trước, sao cho f và G liên kết với nhau trong định nghĩa phân phối liên hợp (joint distribution) P trên không gian $X\times\Theta$, trong đó X là không gian trạng thái của $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$. Khi đó, kết luận được đưa ra thông qua phân phối hậu nghiệm (posterior distrubution), G^* đạt được từ P với điều kiện của dữ liệu x sao cho

$$g^*(\theta)=\frac{dG^*}{dG}(\theta)=\frac{dP(.|x)}{dG}(\theta)\propto L(\theta|x)=f(x|\theta)=f(x_1|\theta)\cdots f(x_n|\theta).$$

Vì vậy, hàm mật độ hậu nghiệm sẽ tương ứng với hàm mật độ tiên nghiệm tỉ lệ với hàm Likelihood L.

Khi đó, phân phối hậu nghiệm G^* biểu diễn suy luận đầy đủ về θ, kết hợp với thông tin tiên nghiệm G và thông tin dữ liệu L.

Trong ví dụ cụ thể, người ta quan tâm đến một hoặc nhiều hàm đặc biệt $h=h(\theta)$ của tham số. Trong trường hợp của chúng ta, h là phân phối ME được biểu diễn thông qua hàm phân phối (cdf) chẳng hạn.

Suy luận về h sẽ được biểu diễn bằng phân phối hậu nghiệm của h hoặc các tham số cụ thể của phân phối này, ví dụ như trung bình của nó là

$$h^*=E[h(\theta|x)]=\int_{\Theta}h(\theta)G^*(d\theta), \qquad (3.1)$$

hay phân vị của phân phối hậu nghiệm h nếu h là phân phối một chiều. Trung bình hậu nghiệm h^* trong (3.1) thường được xem là ước lượng Bayes của h mặc dù đôi khi điều này không chính xác. Bởi vì, có nhiều tham số khác của phân phối hậu nghiệm thú vị hơn trung bình của nó. Một khoảng như $[u_{.025}, u_{.975}]$ với u_α là phân vị của phân phối hậu nghiệm ψ, là khoảng tin cậy (credibility interval) 95% đối với ψ. Chú ý thể hiện của khoảng tin cậy này thì khác hoàn toàn với khoảng tin cậy truyền thống và có khởi đầu (genesis) phức tạp hơn.

Vấn đề khó khăn còn lại của suy luận (Bayesian inference) liên quan đến việc chỉ rõ xác suất tiên nghiệm G, biểu diễn hậu nghiệm G^* và tính tích phân tương ứng với G^* như phương trình (3.1).

Để cho đơn giản, người ta thường sử dụng họ phân phối tiên nghiệm liên hợp. Một họ phân phối $\mathcal{G}$ được nói là liên hợp đối với bài toán suy luận Bayes, nếu nó đóng dưới phân tích tiên nghiệm đến hậu nghiệm (prior-to-posterior), i.e. $G \in \mathcal{G}$ thì $G^* \in \mathcal{G}$ với dữ liệu x bất kì. Họ liên hợp đôi khi thuận lợi trong việc số hóa bài toán bởi bản thân nó là hỗn hợp tham số (hyper-parameter) η, i.e. $\mathcal{G} = \{G_\eta, \eta \in H\}$. Khi đó, phân tích tiên nghiệm đến hậu nghiệm có thể được tóm tắt bằng cách chỉ ra hỗn hợp tham số hậu nghiệm η^* phụ thuộc như thế nào với hỗn hợp tham số tiên nghiệm η và dữ liệu x.

2.3. Phương pháp Markov Chain Monte Carlo

Phương pháp Markov chain Monte Carlo (MCMC) có ứng dụng đầu tiên trong vật lý thống kê (Metropolis et al., 1953). Phương pháp này được sử dụng để mô tả hoạt động của hệ thống hạt nguyên tử và phân tử phức tạp. Ứng dụng đầu tiên của MCMC trong mô hình thống kê là tính tích phân của phân phối hậu nghiệm Bayes trong bài toán phức tạp (Gelfand and Smith, 1990; Gilks et al., 1996). Bên cạnh đó, MCMC cũng được sử dụng để phân tích Likehood truyền thống (Geyer and Thompson, 1992). Trong thời gian gần đây, phương pháp này được ứng dụng nhiều trong các ngành khác nhau như Thống kê, Kinh tế,... (xem Green (2001)).

MCMC được sử dụng trong nhiều nhánh của Toán và Kinh tế nhưng thuật toán MCMC khác nhau. Trong phần này, chúng ta sẽ giải thích và khai thác mẫu Gibb (Geman (1984) và thuật toán Metropolis-Hastings (MH) (Hastings, 1970).

Cơ bản của mẫu Gibb là chọn hữu hạn biến ngẫu nhiên $Y = (Y_v)_{v \in V}$ với phân phối mục tiêu (target distribution) liên hợp τ. Khi đó, mẫu Gibb dẫn đến các bước như sau: Trước tiên, chọn phần tử ban đầu $y^0 = (y_v^0)_{v \in V}$ tùy ý. Sau đó, số phần tử của V là $V = \{1, 2, \ldots, |V|\}$ và tạo ra các biến ngẫu nhiên từ điều kiên đầy đủ $\mathcal{L}(Y_v \mid Y_{V \setminus \{v\}})$ bằng cách:

- Lấy y_1^1 từ $\mathcal{L}(Y_1 \mid y^0_{V \setminus \{1\}})$;
- Lấy y_2^1 từ $\mathcal{L}(Y_2 \mid y^0_{V \setminus \{1,2\}}, y_1^1)$;
- Lấy y_3^1 từ $\mathcal{L}(Y_3 \mid y^0_{V \setminus \{1,2,3\}}, y_1^1, y_2^1)$;
- Tiếp tục cho đến khi lấy được $y^1_{|V|}$

  từ $\mathcal{L}(Y_{|V|} \mid y^0_{V \setminus \{|V|\}}, y_1^1, y_2^1, \ldots, y^1_{|V|-1})$.

Mỗi bước như trên được xem như bước đi của quá trình. Khi tất cả các vị trí được quá trình đi qua, một bước chuyển từ $y^0 = (y_v^0)_{v \in V}$ đến $y^1 = (y_v^1)_{v \in V}$ được chọn. Quá trình lặp lại cho đến khi tạo thành công các giá trị $y^0, y^1, \ldots, y^n, \ldots$ Các điểm $y^0, y^1, \ldots, y^n, \ldots$ tạo được nhờ mối liên hệ của Markov chain, trong đó, τ đóng vai trò phân phối tương đương. Do tính dừng (ergodicity), tích phân của hàm h tương ứng với τ được xấp xỉ bằng trung bình của mẫu Gibbs

$$\int h(y)\tau(dy) \approx \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} h(y^v). \quad (3.2)$$

Trong suy luận Bayes, mục tiêu thường là phân phối có điều kiện của Y được cho bởi tập quan trắc của biến ngẫu nhiên $Y_\upsilon = y_\upsilon^*, \upsilon \in A \subseteq V$. Điều chỉnh cần phải đạt được một mẫu từ phân phối có điều kiện này, nghĩa là trạng thái bắt đầu phải thỏa

$y_\upsilon^0 = y_\upsilon^*, \forall \upsilon \in A$ và các trạng thái trong A không được cập nhật.

Thuật toán Metropolis–Hastings thì không cần thiết gắn liền với một trạng thái cụ thể nào. Chúng ta sẽ khử nhiễu ở vị trí tiếp theo và viết các bước lặp lại như một kí hiệu thay vì viết lên trên. Thuật toán MH cấu trúc như một xích Markov $\{Y_n\}$ bằng cách lấy Z = z với mọi n từ phân phối đề nghị ρ^{y_n} để đạt được xích di chuyển đến $Y_{n+1} = z$ và chấp nhận đề nghị này với xác suất thích hợp $a(z, y_n)$. Nhìn chung, phân phối đề nghị là tùy ý, nhưng kết quả của thuật toán phụ thuộc vào xác suất chấp nhận. Vì vậy, thuật toán Metropolis–Hastings là

- Lấy điểm $Y_0 = y_0$ bất kỳ;
- Trong n bước, lấy Z = z từ $\rho(.| y_n)$, đặt $Y_{n+1} = z$ với xác suất $a(y_n, z)$ và $Y_{n+1} = y_n$ với xác suất

$1\text{-}a(y_n, z)$, trong đó xác suất chấp nhận $a(y_n, z)$ được xác định như sau:

$$a(y_n, z) = \min\left\{1, \frac{\frac{d\tau}{d\rho^{y_n}}(z)}{\frac{d\tau}{d\rho^{z}}(y_n)}\right\}$$

Nếu $\rho^y = \rho$ thì chúng ta nói về một mẫu phụ thuộc. Trong bài báo này, tất cả thuật toán MH là mẫu phụ thuộc.

Nhìn chung, cả hai thuật toán Gibbs và MH đều là loại bỏ tiên nghiệm thử nghiệm ban đầu và chỉ giữ lại trung bình (3.2) cho tất cả các giá trị đạt được sau bước thử nghiệm này. Bài toán với phương pháp MCMC có thể hội tụ rất chậm nếu xích Markov tạo ra không tốt và nó có thể khá khó để đánh giá sự hội tụ trong các tình huống thực tế.

Một biến thể của thuật toán được biết như "Metropolis-trong-Gibbs", trong đó, một bước MH được sử dụng để thay thế bước cập nhật Gibbs (Gibbs updating) tại trạng thái đơn. Thực vậy, thuật toán cuối cùng được trình bày trong bài báo này là một biến thể như trên, trong đó quan sát từ chu kỳ thử nghiệm (burn-in period) của mẫu MH được bỏ trước khi mẫu Gibbs được cập nhật. Trong phần này, mẫu Gibbs được sử dụng trong trường hợp $|V| = 2$ và phân phối mục tiêu là phân phối có điều kiện của (θ, Y) với dữ liệu x đã cho, $\theta = (\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A})$ là biểu diễn ME và Y là tập đầy đủ các trạng thái của quá trình Markov. Khi đó, chúng ta sử dụng phân phối liên hợp đơn giản để lấy mẫu θ với y (và x) được cho và sử dụng thuật toán MH để lấy mẫu Y với (θ, x) đã cho.

3. Lấy mẫu của phân phối mũ ma trận

3.1. Lấy mẫu từ quá trình Markov liên hợp với biến mũ ma trận

Đặt X là biến ngẫu nhiên với phân phối ME và J là quá trình Markov liên hợp. Chúng ta sẽ mô phỏng quá trình Markov J từ phân phối có điều kiện của J với điều kiện X = x đã cho, trong đó X là thời gian đạt đến của quá trình Markov với ma trận cường độ chuyển $\mathbf{A}$ và phân phối xác suất ban đầu $(\boldsymbol{\alpha}, 0)$.

Ý tưởng của chúng tôi là sử dụng quá trình Markov này để thu được trạng thái đạt đến tại thời điểm x. Với một quá trình Markov khác, trạng thái đạt đến sẽ cách xa thời điểm x và sử dụng thay thế này như đề nghị trong thuật toán Metropolis–Hastings.

Đặt J_t là quá trình Markov với ma trận cường độ $\mathbf{A}$ và phân phối ban đầu $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\alpha}, 0)$. Khi đó, phân phối của J_s là $\boldsymbol{\pi}\exp(\mathbf{A}s)$, do đó

$$q_i(s) := P_\alpha(J_s = i) = \boldsymbol{\pi}\exp(\mathbf{A}s)\,\mathbf{e}_i,$$

là xác suất của quá trình Markov ở trạng thái i tại thời điểm s, trong đó $\mathbf{e}_i$ là vector cột với phần tử thứ i bằng 1, tất cả các phần tử khác bằng 0. Vì $t = \sum_i t_i \mathbf{e}_i$, mật độ của x có thể biểu diễn đơn giản bởi hàm q như sau:

$$f_X(x) = \sum_i q_i t_i .$$

Phân phối tiên nghiệm của xích Markov đối với trạng thái đạt đến chính xác là

$$\tilde{\alpha}_i := P\{J_{x^-} = i \mid X = x\} = \frac{q_i(x)t_i}{f_X(x)}, \qquad (5.1)$$

điều này suy ra từ

$$q_i(x)t_i dx = P\{J_{x^-} = i \mid X \in [x, x+dx)\} = P\{J_{x^-} = i \mid X = x\} f_X(x)dx.$$

Đặt $P_x = P(. \mid X = x)$ là phân phối cần tìm và $P_x^* = P(. \mid X \geq x)$ là phân phối của $J_{t^-}, 0 \leq t \leq x$ với điều kiện $X \geq x$. Do đó, P_x là phân phối mục tiêu và P_x^* là phân phối đề nghị. Sau cùng, chúng ta mô phỏng quá trình ban đầu và loại bỏ nếu trạng thái đạt đến xảy ra trước thời điểm x. Khi đó, những trường hợp khác được chấp nhận.

Tính Markov mạnh của J_t suy ra $J_{t^-}, 0 \leq t \leq x$ và X là độc lập có điều kiện với J_{t^-} được cho. Do đó,

$$P_x(\{J_{t^-}\}_{t<x} = \{j_{t^-}\}_{t<x} \mid J_{x^-}) = P_x^*(\{J_{t^-}\}_{t<x} = \{j_{t^-}\}_{t<x} \mid J_{x^-}).$$

Phân phối P_x^* tại thời điểm x^- được cho bởi

$$\alpha_i^* := P\{J_{x^-} = i \mid X \geq x\} = \frac{q_i(x)}{\sum_j q_j(x)}$$

bởi vì $P(X \geq x) = \sum_{j=1}^{n} P\{J_{x^-} = j\} = \sum_{j=1}^{n} q_j(x)$. Vì vậy, chúng ta có

$$\begin{aligned}
\frac{dP_x}{dP_x^*}\{J_t, t < x\} &= \frac{P_x(\{J_t : t < x\} = \{j_t : t < x\})}{P_x^*(\{J_t : t < x\} = \{j_t : t < x\})} \\
&= \frac{P_x(\{J_t : t < x\} = \{j_t : t < x\} \mid J_{x^-} = j_{x^-}) P_x(J_{x^-} = j_{x^-})}{P_x^*(\{J_t : t < x\} = \{j_t : t < x\} \mid J_{x^-} = j_{x^-}) P_x(J_{x^-} = j_{x^-})} \\
&= \frac{P_x(J_{x^-} = j_{x^-})}{P_x^*(J_{x^-} = j_{x^-})} = \frac{\tilde{\alpha}_{jx^-}}{\alpha_{jx^-}^*}.
\end{aligned}$$

Trong phần chính, phân số này có thể được sử dụng như trọng số đối với quá trình mẫu quan trọng dựa vào mẫu từ P_x^* thay vì P_x. Tuy nhiên, tính trọng số quan trọng này thường là rất khó, vì thế chúng ta tính phân số này bằng mũ ma trận.

Để thực hiện điều này, chúng ta xây dựng xích Markov dừng với P_x giữ vai trò là phân phối tương đương nhờ vào thuật toán MH với P_x^* là phân phối đề nghị.

Điều này lặp lại việc thay thế mẫu tiềm năng của mẫu đã cho $j' = (j'_t, t < x)$ bằng mẫu mới $j = (j_t, t < x)$, đạt được bằng cách lấy mẫu từ P_x^*. Xác suất chấp nhận MH $a(j, j')$ là tỉ số

$$a(j, j') = \frac{\alpha_{j'_{x^-}}^*}{\tilde{\alpha}_{j'_{x^-}}} \frac{\tilde{\alpha}_{j_{x^-}}}{\alpha_{j_{x^-}}^*} = \frac{t_{j_{x^-}}}{t_{j'_{x^-}}},$$

phân số này dễ dàng được tính.

Phân phối dừng của xích Markov trong cấu trúc quá trình Markov xây dựng theo cách tính này sẽ là P_x. Vì vậy, thuật toán trở thành:

Lấy mẫu từ $P_x = P(. \mid X = x)$ *có thể được hoàn thành như sau:*

1. Sinh ra $\{j'_t, t < x\}$ từ $P_x^* = P(. \mid X \geq x)$ bằng cách loại bỏ mẫu;
2. Sinh ra $\{j_t, t < x\}$ từ $P_x^* = P(. \mid X \geq x)$ bằng cách loại bỏ mẫu;
3. Lấy $U \sim U[0,1]$;
4. Nếu $U \leq \min\{1, t_{j_{x^-}} / t_{j'_{x^-}}\}$ thì thay $\{j'_t\}_{t<x}$ bằng $\{j_t\}_{t<x}$;
5. Trở về bước (2).

3.2. Mẫu Gibbs (Gibbs ampler)

Mẫu Gibbs đã sử dụng đối với việc thay phiên suy luận giữa mẫu từ phân phối có điều kiện của quá trình Markov $\mathbf{J}$ với $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A})$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ đã cho và phân phối có điều kiện của $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{A})$ với dữ liệu $\mathbf{y}$ đã cho đầy đủ.

Đối với bước đầu tiên, chúng ta sử dụng thuật toán MH đã trình bày trong phần trước. Bước tiếp theo, chúng ta sử dụng tính chất liên hợp của phân phối tiên nghiệm đối với dữ liệu đầy đủ. Tóm lại, chúng ta có thuật toán sau:

Mẫu Gibbs đầy đủ: Xác định β_i, υ_{ij}, $\zeta_i, i = 1, 2, \ldots, p$ *và đặt* $\beta = \{\beta_i, i = 1, 2, \ldots, p\}$.

1. Tạo ra $\boldsymbol{\alpha}, A_{ij}, i \neq j$ và $t_i, i = 1, 2, \ldots, p$ từ phân phối tiên nghiệm;
2. Tạo ra $\mathbf{J} = (\mathbf{J_1}, \mathbf{J_2}, \ldots, \mathbf{J_N})$, với mỗi $\mathbf{J}_i$ là quá trình Markov có trạng thái đạt đến tại thời điểm x_i đạt được nhờ sử dụng một số bước cố định của thuật toán MH;
3. Tính thống kê $\mathbf{b} = \{B_i, i = 1, 2, \ldots, p\}, z = \{Z_i, i = 1, 2, \ldots, p\}$ và $N = \{N_{ij}, i = 1, 2, \ldots, p\}$ từ dữ liệu $\mathbf{J}$;
4. Lấy $\boldsymbol{\alpha}, A_{ij}, i \neq j$ và $t_i, i = 1, 2, \ldots, p$ từ điều kiện đầy đủ:
   $$\boldsymbol{\alpha} \sim \mathrm{Dir}(\boldsymbol{\beta} + \mathbf{b})$$
   $$t_i \sim \mathrm{Gamma}(1/(\zeta_i + z_i), N_{i0} + \upsilon_{i0}), i = 1, 2, \ldots, p$$
   $$t_{ij} \sim \mathrm{Gamma}(1/(\zeta_i + z_i), N_{ij} + \upsilon_{ij}), i \neq j$$
5. Trở về bước (2).

Theo cách này, sau một chu kỳ thử nghiệm chắc chắn, chúng ta đưa ra một dãy trạng thái xấp xỉ của phân phối (độ đo) được lấy ra từ lớp phân phối ME đã cho. Dãy này có thể được sử dụng theo nhiều cách để thu được thông tin về hàm của độ đo ME chưa biết.

3.3. Quá trình rủi ro hai chiều (two-dimensional risk process)

Trong phần này, chúng ta xét mô hình rủi ro hai chiều (hai công ty bảo hiểm hoặc hai nhánh của công ty bảo hiểm) chia lượng bồi thường cho mỗi khách hàng theo tỉ lệ η_1 và η_2 với $\eta_1 + \eta_2 = 1$ và nhận phí tương ứng là c_1, c_2. Đặt X_i là quá trình rủi ro của công ty i

$$X_i(t) = x_i + c_i t - \eta_i S(t), \qquad i = 1, 2$$

- x_i là vốn ban đầu của công ty i;
- c_i là phí bảo hiểm của công ty i;
- $S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} z_k$, $N(t)$ là quá trình đếm Poison với bước nhảy không âm, z_k là các biến ngẫu nhiên độc lập và cùng phân phối [2].

Chúng ta kí hiệu $F(x)$ là hàm phân phối của bồi thường z_k; λ là trung bình thời gian đến của $N(t)$ và μ là trung bình của z_k. Chúng ta cũng giả sử rằng công ty thứ hai được gọi là bảo hiểm lại sẽ nhận lượng phí trên lượng trả ra ít hơn công ty thứ nhất, đó là

$$p_1 = \frac{c_1}{\eta_1} > \frac{c_2}{\eta_2} = p_2. \qquad (7.1)$$

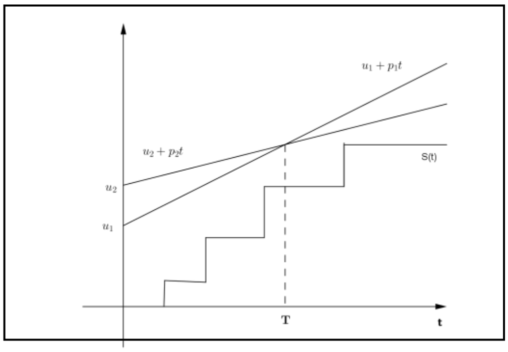
Thời điểm đầu tiên τ khi có ít nhất một công ty phá sản là

$$\tau(x_1, x_2) := \inf\left\{t \geq 0 : X_1(t) < 0 \text{ hay } X_2(t) < 0\right\}.$$

Xác suất phá sản trong thời gian hữu hạn

$$\psi(x_1, x_2) = \Pr(\tau(x_1, x_2) < t).$$

Đặt $U_i(t) = \frac{X_i(t)}{\eta_i} = u_i + p_i t - S(t)$ với $u_i = \frac{x_i}{\eta_i}$ và $p_i = \frac{c_i}{\eta_i}$.



Hình 1. two-dimensional risk process

Nếu vốn ban đầu $u_2 \leq u_1$, hai đường thẳng này không giao nhau. Trường hợp này, suy ra trực tiếp từ lý thuyết phá sản một chiều; xem Rolski et all [6], chúng ta sẽ không thảo luận trong phần này. Tiếp theo, chúng ta xét trường hợp $u_1 < u_2$.

Nếu $U_i(t)$ là quá trình rủi ro, thì biến đổi Laplace (Laplace transform) của hàm phá sản là

$$\psi^*(s)=\int_0^\infty \exp(-su_i)d\Psi(u_i)=\int_0^\infty \exp(-su_i)\psi(u_i)du_i, \quad (7.2)$$

trong đó $\psi(u)=\dfrac{\partial\Psi(u_i)}{\partial u_i}$. Nếu hàm ψ có ba biến độc lập (t,u_i,y), trong đó, y được hiểu là số tiền thâm hụt của công ty tại thời điểm phá sản. Khi đó, định nghĩa biến đổi Laplace tương ứng với mỗi biến là

$$\psi^*(z,u_i,y)=\int_0^\infty e^{-zt}\psi(t,u_i,y)dt$$
$$\psi^*(t,s,y)=\int_0^\infty e^{-su_i}\psi(t,u_i,y)du_i$$
$$\psi^*(t,u_i,b)=\int_0^\infty e^{-by}\psi(t,u_i,y)dy.$$

Định nghĩa của biến đổi Laplace bậc hai là

$$\psi^{**}(z,u_i,b)=\int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-zt-by)\psi(t,u_i,y)dtdy.$$

Định nghĩa của biến đổi Laplace bậc ba là

$$\psi^{***}(z,s,b)=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-at-by-su_i)\psi(t,u_i,y)dtdydu_i.$$

Khi hàm mật độ của số tiền bồi thường (claims) có phân phối ME

$$f(t)=\boldsymbol{\alpha}\exp(\mathbf{A}t)\mathbf{a},$$

thì biến đổi Laplace của hàm mật độ phá sản được tính theo định lý sau:

Định lý 1. Nếu $U_i(t)$ là quá trình rủi ro với số tiền bồi thường có phân phối ME $(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{A})$ và m là một số dương bất kì, thì LST của hàm phá sản là

$$\psi_i^*(z,u_i,y)=\boldsymbol{\pi}\exp(\mathbf{Q}u_i)\exp(\mathbf{A}y)\mathbf{a}, \quad (7.3)$$

$$\psi_i^{**}(z,u_i,b)=\boldsymbol{\pi}\exp(\mathbf{Q}u_i)(b\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{a}, \quad (7.4)$$

$$\psi_i^{***}(z,s,b)=\boldsymbol{\pi}(s\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}(b\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{a}, \quad (7.5)$$

với

$$\mathbf{Q}=\mathbf{A}+\mathbf{a}\boldsymbol{\pi},\quad \boldsymbol{\pi}=\frac{\lambda}{c}\boldsymbol{\alpha}(s_z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1},\quad \exp(\mathbf{Q}u_i)=\frac{(\mathbf{Q}u_i)^k}{k!},$$

s_m là nghiệm không âm của phương trình Lundberg

$$\kappa(s_m)=cs+\lambda(f^*(s)-1)=m,$$

và $f^*(s)$ là LST của hàm mật độ bồi thường f(t).

Chứng minh.

Chúng ta sử dụng LST bậc ba của hàm phá [1]

$$\psi^{***}(z,s,b)=(z-\kappa(s))^{-1}\left(\frac{\kappa(s)-\kappa(b)}{b-s}-\frac{\kappa(s_m)-\kappa(b)}{b-s_m}\right) \quad (7.6)$$

và

$$\kappa(s)=cs+\lambda(f^*(s)-1)=cs+\lambda(\boldsymbol{\alpha}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{a}-1).$$

Chúng ta thấy rằng

$$\frac{\kappa(s)-\kappa(b)}{b-s}=-c+\lambda\boldsymbol{\alpha}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}(b\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{a}.$$

Thế vào phương trình LST bậc ba (7.5), ta được

$$\begin{aligned}\psi^{***}(z,s,b)&=\frac{s_m-s}{\kappa(s_m)-\kappa(s)})\lambda\boldsymbol{\alpha}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}(s_m\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}(b\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{a}\\&=\frac{\lambda\boldsymbol{\alpha}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}(s_m\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}(b\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{a}}{c-\lambda\boldsymbol{\alpha}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}(s_m\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{a}}\\&=\frac{\boldsymbol{\pi}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}(b\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{a}}{1-\boldsymbol{\pi}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{a}}\\&=\boldsymbol{\pi}[s\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{a}\boldsymbol{\pi})]^{-1}(b\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{a}.\end{aligned}$$

Sử dụng LST ngược, chúng ta thu được (7.4) và (7.3). ■

Khi z = 0 $(s_m=0)$ và y = 0, xác suất phá sản trong miền thời gian hữu hạn được tìm thấy từ định lý 1 như sau:

$$\psi^*(z,u_i,y)=\int_0^\infty \psi(t,u_i,0)dt=\Psi(t,u_i,0)=\boldsymbol{\pi}\exp(\mathbf{Q}u_i)\mathbf{a}.$$

4. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã sử dụng phương Markov chain Monte Carlo để ước lượng các tham số của phân phối mũ ma trận từ số liệu bồi thường bảo hiểm của khách hàng. Sau đó, chúng tôi dụng biến đổi Laplace-Steiject và biến đổi Laplace-Steiject ngược của phân phối mũ ma trận để đưa ra công thức tính xác suất phá sản trong miền thời gian hữu hạn của công ty bảo hiểm trong mô hình rủi ro hai chiều. Bên cạnh đó, phân phối mũ ma trận còn có ứng dụng trong lý thuyết xếp hàng (queueing theory), lý thuyết đổi mới (renewal theory)…[7].

Tài liệu tham khảo

[1] Asmussen, Søren, and Mogens Bladt. "Renewal theory and queueing algorithms for matrix-exponential distributions." Matrix-analytic methods in stochastic models. *Marcel Dekker Incorporated,* 1996, 313-341.

[2] Avram, F., Palmowski, Z., & Pistorius, M. R. Exit problem of a two-dimensional risk process from the quadrant: exact and asymptotic results. *The Annals of Applied Probability* (2008), 2421-2449.

[3] Botta, R. F., Harris, C. M., & Marchal, W. G. Characterizations of generalized hyperexponential distribution functions. *Stochastic Models,* **3** (1987), 115-148.

[4] Jose, M. Bernardo, Adrian F. M. Smith. Bayesian Theory, John Wiley & Sons, Chichester and New York, 1994, pp 611.

[5] Lipsky, L. Queueing Theory: A linear algebraic approach. Springer Science & Business Media, 2008, pp. 548.

[6] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., & Teugels, J. Stochastic processes for insurance and finance (Vol. 505). John Wiley & Sons, 2009, pp 662.

[7] Bladt, M., & Nielsen, B. F. Matrix-exponential distributions in applied probability (Vol. 81). New York: Springer, 2017.